

Линейное программирование.

Общая задача лн. программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle$$

$$u \in U = \{ u = (u^1, \dots, u^n) : u^j \geq 0, j \in I_0, \\ \overset{m_1 \times n}{A_1} u \leq \overset{m_1}{b_1}, \overset{m_2 \times n}{A_2} u = \overset{m_2}{b_2} \} \quad (03)$$

Каноническая задача:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf$$

$$u \in U = \{ u \geq 0, \overset{m \times n}{A} u = \overset{m}{b} \} \quad (1)$$

Всякая такая задача может быть записана в эквивалентной канонической форме.

$$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad U = \{ u \geq 0, A_1 u \leq b_1, \\ A_2 u = b_2 \} \quad (03_1)$$

$$\text{Введем } \delta = b_1 - A_1 u \geq 0 \Rightarrow A_1 u + \delta = b_1, \delta \geq 0$$

$$z = (u, \delta) : J(z) = \langle c, u \rangle + \langle 0, \delta \rangle \rightarrow \inf$$

$$z \in Z = \{ z = (u, \delta) \geq 0, A_1 u + \delta = b_1, A_2 u + 0\delta = b_2 \}$$

↑
каноническая задача (1₁)

$$\Rightarrow (03_1) \leftrightarrow (1_1)$$

либо обе задачи не имеют решения, либо, если одна имеет, то и вторая тоже, причем

решения связаны.

z^* - реш. $(1_1) \Rightarrow z^* = (u^*, \bar{v}^*) \rightarrow u^*$ - реш. (03_1)

u^* - реш. $(03_1) \Rightarrow z^* = (u^*, \bar{v}^* = \bar{v}_1 - A_1 u^*)$ - реш. (1_1)

Рассмотрим еще один пример:

$J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, U = \{A_1 u \leq b_1, A_2 u = b_2\} \quad (03_2)$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a = \max_{u \geq 0} \{a; 0\} - \max_{\bar{u} \geq 0} \{-a; 0\}$

$\Rightarrow u^i = \max_{u^i \geq 0} \{u^i, 0\} - \max_{\bar{u}^i \geq 0} \{-u^i, 0\} = \bar{u}^i - \bar{\bar{u}}^i$

$\Rightarrow u = \bar{u} - \bar{\bar{u}} \Rightarrow z = (\bar{u}, \bar{\bar{u}}) : \langle c, u \rangle = \langle c, \bar{u} \rangle - \langle c, \bar{\bar{u}} \rangle \rightarrow$

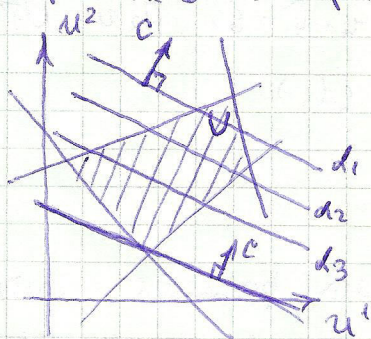
$\rightarrow \inf, z \in Z = \{(\bar{u}, \bar{\bar{u}}) : A_1 u = A_1 \bar{u} - A_1 \bar{\bar{u}} \leq b_1,$

$A_2 u = A_2 \bar{u} - A_2 \bar{\bar{u}} = b_2\} \quad (1_2)$

Стандартная задача линейного программирования:

$\langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U = \{u \geq 0, A u \leq b\}$

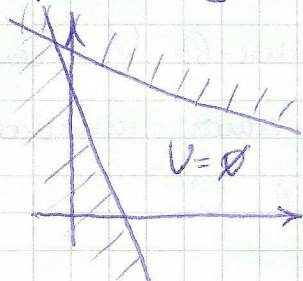
Геометрическое интерпретация:



$\langle c, u \rangle = \alpha$ - интерпретация

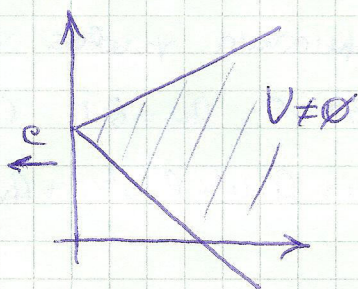
$d_3 < d_2 < d_1$

Пример пустого мн-ва $V = \emptyset$

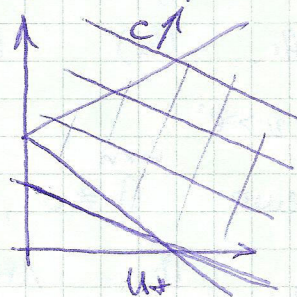


пересечение за пределами 1-й четверти

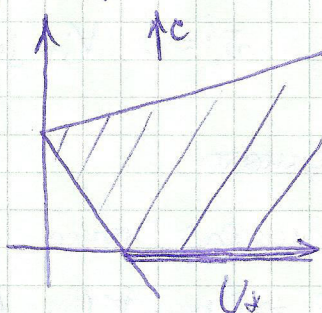
Пример $I_* = -\infty$



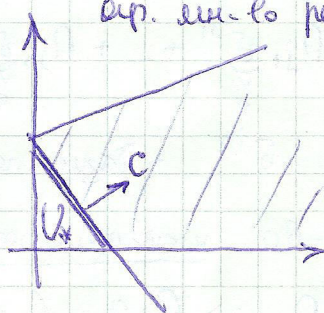
Тут зависит от выбора вектора c .



Пример мн-ва решений



ар. мн-во реш



Условие точки.

$u \in U$ - условная точка мн-ва U , если u не является внутренней точкой некоторого отрезка $[\delta_1, \delta_2]$, лежащего в U .

" $\delta_1 \delta_2 + (1 - \delta_1) \delta_2, 0 \leq \delta_1 \leq 1$

Алгебраическая характеристика условной точки

для мн-ва $U = \{u \geq 0, Au = b\}$ (2)

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad Au = b \Rightarrow A_1 u^1 + A_2 u^2 + \dots + A_n u^n = b$$

$$\langle a_i, u \rangle = b^i$$

Теорема: $A \neq 0$, $\text{rang } A = r \geq 1$

$A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ - ЛНЗ

$\delta = (\delta^1, \dots, \delta^n) \in U$ - условная точка $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A_{j_1} \underbrace{\delta^{j_1}}_0 + \dots + A_{j_r} \underbrace{\delta^{j_r}}_0 = b, \quad \delta^i = 0 \quad \forall i \neq j_1, \dots, j_r \quad (3)$$

$\delta^{j_1}, \dots, \delta^{j_r}$ - значения координат

Док-во: необходимость δ -условная точка

$$1) \delta = 0 \Rightarrow A \cdot 0 = b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \text{верно } \forall A_{j_1}, \dots, A_{j_r} \leftarrow$$

$$\leftarrow \text{равнолю с нулем} \Rightarrow A_{j_1} \cdot 0 + \dots + A_{j_r} \cdot 0 = b = 0$$

$$2) \delta \neq 0 \Rightarrow \delta^{j_1} > 0, \dots, \delta^{j_r} > 0, \text{ остальные } = 0$$

Тогда $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ - ЛНЗ

докажем, что σ обратимо, т.е.

$$\exists r = (r_{ji} - r_{jk}) : A_{ji} r_{ji} + \dots + A_{jk} r_{jk} = 0$$

$$\rightarrow \tilde{A} r = 0, \quad \tilde{A} = (A_{ji} - A_{jk})$$

Рассм. $\delta_{\pm} = \delta^{\pm} \in r$

$$A \delta_{+} = A \delta + \varepsilon A r = A \delta = b \text{ (так } r \text{ состоит из нулей)}$$

$$A \delta_{-} = A \delta - \varepsilon A r = A \delta = b$$

$$\delta^{\pm} = \delta^{\pm} \varepsilon r > 0 > 0 \text{ для } j_1 - j_k \text{ при дост. малых } \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta_{\pm} \in U, \quad \delta = \frac{1}{2} (\delta_{+} + \delta_{-}) = \text{середина } \begin{matrix} \delta_{+}, \delta_{-} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow * \delta - \text{уникал точка} \Rightarrow A_{j_1} - A_{j_k} - \text{ЛНЗ}$$

$k \leq 2$ (т.к. 2-ранг матрицы)

$$1) k=2 \rightarrow A_{j_1} - A_{j_2} = A_{j_2} \text{ - ранговая система столбцов}$$

$$A_{j_1} \delta^{j_1} + \dots + A_{j_2} \delta^{j_2} = b \text{ с } \delta^j > 0$$

$$2) k < 2 \rightarrow A_{j_1} - A_{j_k}, \quad \underset{0}{A_{j_{k+1}}} - \underset{0}{A_{j_2}}$$

достаточно $\delta \in U$ и выполняется (3)

$$\exists \delta_1, \delta_2 \in U : \delta = \alpha \delta_1 + (1-\alpha) \delta_2, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\delta^j \neq 0 \quad j \neq j_1 - j_2 \rightarrow 0 = \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{\delta_1^j}_{>0} + \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} \underbrace{\delta_2^j}_{>0} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_1^j = \delta_2^j = 0 \quad \forall j \neq j_1 - j_2$$

$$\Rightarrow A_{j_1} \delta_1^{j_1} + \dots + A_{j_2} \delta_1^{j_2} = b$$

$$A_{j_1} \delta_2^{j_1} + \dots + A_{j_2} \delta_2^{j_2} = b$$

$\Rightarrow b$ разлагается нуль
ранговые столбцы
двумя способами

$$\Rightarrow \sigma_1^{j_1} = \sigma_2^{j_1}, \dots, \sigma_1^{j_2} = \sigma_2^{j_2} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

$\Rightarrow \sigma$ -узелная точка

опр

Опр: узелная точка наз. вращенной, если среди базисных координат есть нулевые; и наз. невращенной, если все базисные координаты положительные

Пример: $V = \{u = (u^1, u^2, u^3, u^4) \geq 0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, z = 2$$

$u_1 = (2, 1, 0, 0)$ - невращенная узелная точка

базис $B(u_1) = (A_1, A_2)$

$u_2 = (0, 0, 1, 0)$ - вращенная узелная точка

$B(u_2) = (A_1, A_3) \mid (A_2, A_3) \mid (A_3, A_4)$

$u_3 = (0, 5/3, 0, 4/3)$ $B(u_3) = (A_2, A_4)$

u_3 - невращенная узелная точка.

21.02

$$\text{т.е. } A_{j_1} v^{j_1} + \dots + A_{j_z} v^{j_z} = b$$

$$v^j = 0, \quad j \neq j_1 - j_z$$

$$I(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in V = \{u \geq 0, \overset{m \times n}{A} u = \overset{n}{b}\} \quad (1)$$

Симметричный метод

Переопределяет условие симметричности.

$$\begin{aligned} \text{Пусть выберем условие симметрии } \bar{B}(\bar{c}) = \\ = \{A_{j_1} - A_{j_z}\} = \{A_1 - A_z\} = B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Итерации к условной симметрии $\Rightarrow (\bar{c}, B(\bar{c}))$:

$$1) I(\bar{u}) \leq I(\bar{c})$$

$$2) \bar{u} \in V$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{первые 2 условия}$$

$$c = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ c_m \\ c_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u \\ u_{m+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$1) z = \text{rang } A = m$$

$$2) m < n \Leftarrow z = m \leq n \quad \begin{matrix} \text{non} \\ z = m = n \end{matrix} \quad A u = b \Rightarrow u = A^{-1} b \geq 0$$

$$\Rightarrow V = \{u \geq 0\} \text{ или } V = \emptyset \text{ (если } \exists u < 0 \}$$

Будем считать, что $z = m < n$.

$$A u = b \Rightarrow \underbrace{A_1 u^1 + \dots + A_z u^z}_{\parallel B \bar{u}} + A_{z+1} u^{z+1} + \dots + A_n u^n = b$$

$$\Rightarrow B\bar{u} + \sum_{i=2+l}^n A_i u^i = b \Rightarrow \bar{u} + \sum_{i=2+l}^n (B^{-1}A_i)u^i = B^{-1}b = \bar{b}$$

картезианская точка

т.к. $\exists: B\bar{b} = b \Rightarrow \bar{b} = B^{-1}b$

приведение
к канонической

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{b} - \sum_{i=2+l}^n (B^{-1}A_i)u^i$$

Введем теперь у канонической формы компоненты:

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{i=2+l}^n c_i u^i = \langle \bar{c}, \bar{b} - \sum_{i=2+l}^n (B^{-1}A_i)u^i \rangle +$$

$$+ \sum_{i=2+l}^n c_i u^i = \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle - \sum_{i=2+l}^n \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle u^i +$$

$$+ \sum_{i=2+l}^n c_i u^i = \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle - \sum_{i=2+l}^n (\underbrace{\langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle - c_i}_{\Delta_i}) u^i$$

$$\Rightarrow J(u) = \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle - \sum_{i=2+l}^n \Delta_i u^i, \Delta_i = \langle \bar{c}, B^{-1}A_i \rangle - c_i \quad i=2+l \dots n$$

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle - \sum_{i=2+l}^n \Delta_i u^i \rightarrow \inf,$$

$$u \in U = \{u \geq 0 : \bar{u} + \sum_{i=2+l}^n (B^{-1}A_i)u^i = \bar{b}\} \leftarrow \text{приведенная форма задачи (1)}$$

Введем $u^k : u^{2+l} = 0, u^{k+1} = 0, u^{k+2} = 0, u^n = 0$

$$\Rightarrow J(u) = \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle - \Delta_k u^k \quad \{u \geq 0,$$

$$\bar{u} + (B^{-1}A_k)u^k = \bar{b}\}$$

$$J(u) = \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle - \Delta_k u^k \rightarrow \inf, \bar{u} = \bar{b} - (B^{-1}A_k)u^k$$

↑
Новая задача (неживильная задача (1))

$$w: J(w) \leq J(v), w \in U: w \geq 0, Aw = b$$

где w - переменная задачи с ограничениями u^k .

$$\text{Известно } \Delta_k \leq 0 \Rightarrow \delta\text{-переменная задачи (1)}$$

$$\forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow (A_i^T A_i) u_i \leq 0$$

$$\forall u \in U \Rightarrow J(u) = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{i=1}^n c_i u_i \geq$$

$$\{ \Delta_k \leq 0 \Leftrightarrow c_i \geq \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle \}$$

$$\geq \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle u_i = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \underbrace{\sum_{i=1}^n B^{-1} A_i u_i}_{\frac{1}{\delta}} =$$

$$\neq \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{c}, v \rangle = J(v)$$

$$\Rightarrow J(u) \geq J(v) \quad \forall u \in U \Rightarrow \delta\text{-оптимальная точка}$$

$$\text{II } \exists \Delta_k > 0, (B^{-1} A_k) \leq 0$$

$$J(u) = J(v) - \underbrace{\Delta_k}_{\downarrow} \underbrace{u^k}_{\downarrow +\infty} \rightarrow +\infty \rightarrow J_x = -\infty$$

$$\text{III } \exists \Delta_k > 0, \text{ и } \forall k, \text{ где некоторые } \Delta_k > 0$$

$$\exists i, \text{ то } (B^{-1} A_k)^i > 0$$

$$\updownarrow$$

$$I_k(v) = \{ i: (B^{-1} A_k)^i > 0 \} \neq \emptyset$$

$$u^i = \bar{v}^i - (B^{-1} A_k)^i u_k$$

$$1) i \notin I_k(v) \quad u^i \geq \bar{v}^i - \underbrace{(B^{-1} A_k)^i}_{\geq 0} \underbrace{u_k}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall u_k \geq 0$$

$$2) i \in I_k(v) \quad u^i = \bar{v}^i - \underbrace{(B^{-1} A_k)^i}_{> 0} u_k \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^i \geq (B^{-1}A_k)^i u^k \Rightarrow \frac{\sigma^i}{(B^{-1}A_k)^i} \geq u^k \geq 0 \quad \forall k \in I_k(\sigma)$$

↑
сравнение на u^k

$$J(u) = J(\sigma) - \underbrace{A_k u^k}_0$$

$$u^k = \min_{i \in I_k(\sigma)} \frac{\sigma^i}{(B^{-1}A_k)^i}$$

$$p_{Bk} = (B^{-1}A_k)^i$$

28.12

$$\exists s: \min_{k \in I_k(\sigma)} \frac{\sigma^i}{p_{Bk}} = \frac{\sigma^s}{p_{Bs}} = u^k$$

$$\bar{u} + B^{-1}A_k u^k = \bar{\sigma}$$

$$\bar{w} = (\bar{u} = \bar{\sigma} - B^{-1}A_k u^k, 0, \dots, 0, u^k = \frac{\sigma^s}{p_{Bs}}, 0, \dots, 0)$$

$$(\bar{\sigma}, B(\bar{\sigma})) \xrightarrow{\text{III}} (\bar{w}, B(\bar{w})) - \text{пу. точка}$$

$\bar{w} \in U$ забегало

$$B(\bar{w}) = (A_1, \dots, A_{s-1}, A_k, A_{s+1} - A_2)$$

$$\bar{w}^s = \sigma^s - (B^{-1}A_k)^s u^k = \sigma^s - p_{Bs} \frac{\sigma^s}{p_{Bs}} = 0$$

||
 $\frac{\sigma^s}{p_{Bs}}$

$\Rightarrow$ это теперь не базисная координатная кан и это отмечено

Остаток g -а, то $B(\bar{w})$ - базис:

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{s-1} A_{s-1} + \alpha_s A_s + \alpha_{s+1} A_{s+1} + \dots + \alpha_2 A_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^2 \alpha_i A_i + \alpha_s A_s = 0$$

$$A_s = BB^T A_s = A_1 B_{1s} + \dots + A_2 B_{2s} = \sum_{i=1}^2 A_i B_{is}$$

inseriamo A_s e riprendo p-los

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^2 \alpha_i A_i + \alpha_s \sum_{i=1}^2 A_i B_{is} = 0$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^2 (\alpha_i + \alpha_s B_{is}) A_i = 0$$

min. mod. $A_1, A_2, A_{s+1}, \dots, A_2$
1/13 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_i + \alpha_s B_{is} = 0 \\ B_{is} \alpha_s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_i = 0 \quad i=1, 2 \\ \alpha_s = 0 \quad \text{ip} \end{array}$$

$$A_1 w_1 + \dots + A_{s-1} w_{s-1} + A_s w^k + A_{s+1} w^{s+1} + \dots + A_2 w^2 = b$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{u} + B^T A_s u_k = \bar{b}$$

$\Rightarrow w$ -guola rossa

Conoscenza ~~matematica~~

линейная комбинация

	$B(i)$	γ	u^1	u^2	u^3	u^2	u^{n+1}
Γ_1	1	γ^1	1	0	0	0	γ_{n+1}
Γ_3	5	γ^5	0	γ_{31}^{11}	γ_{35}^{11}	γ_{32}^{11}	γ_{3n+1}
Γ_2	2	γ^2	0	0	0	1	γ_{2n+1}
Δ	γ^0	0	0	0	0	0	γ_{n+1}

$$Au = b \Leftrightarrow \bar{u} + \sum_{i=2+1}^n (B^{-1}A_i)u^i = \bar{v} = B^{-1}b$$

Запишем 2-ое уравнение

$$u^3 + \sum_{i=2+1}^n (B^{-1}A_i)u^i = \gamma^3$$

и подставим в данное это уравнение

$$I(\bar{v}) = I(u) + \sum_{i=2+1}^n \Delta_i u^i$$

$$\Delta_i = \langle \bar{v}, B^{-1}A_i \rangle - c_i, \quad i = \overline{2+1, n}$$

$$1 \leq i \leq n \quad \Delta_i = \langle \bar{v}, B^{-1}A_i \rangle - c_i = \langle \bar{v}, v_i \rangle - c_i = c_i - c_i = 0$$

	u^k	u^n
	p_{1k}	p_{1n}
	p_{2k}	p_{2n}
	p_{3k}	p_{3n}
	Δ_k	Δ_n

I случай $\rightarrow \exists \epsilon \in U_k$ (в некоторой окрестности не имеет максимума)

II случай $\rightarrow \exists \Delta_k > 0$ (существование k -ой строки)
 $\rightarrow B^{-1}A_k \leq 0$
 $\Rightarrow J_k = -\infty$

III случай $\rightarrow \exists \Delta_k > 0$ (существование k -ой строки)
 $(B^{-1}A_k)^T = p_{1:k} > 0$
 $I_k(\delta) \neq \emptyset$

$$u^k = \min_{i \in I_k(\delta)} \frac{\delta^i}{p_{1:k}} = \frac{\delta^S}{p_{1:k}}$$

$(w, B/w)$ — S-состояние?

$$B^{-1}(w) \mid A_1 u^1 + \dots + A_n u^n = b$$

$$\begin{matrix} u_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

Условие существования

$\neq S$ — окрестность

Переход к более δ -малым осуществляется с помощью леммы Гейеса - неорган.

$$\Gamma_S(\omega) = \frac{\Gamma_S(\delta)}{\beta_{SK}}$$

$$\Gamma_i(\omega) = \Gamma_i(\delta) - \beta_{ik} \frac{\Gamma_S(\delta)}{\beta_{SK}}$$

$$\Delta(\omega) = \Delta(\delta) - \Delta_K \frac{\Gamma_S(\delta)}{\beta_{SK}}$$

$$J(\omega) = J(\delta) - \Delta_K u^K = J(\delta) - \Delta_K \frac{\frac{\partial J}{\partial \beta_K}}{u^K} > 0$$

$$0 \leq u^K = \max_{i \in I_K(\delta)} \frac{\frac{\partial J}{\partial \beta_K}}{\beta_{ik}} = \frac{\frac{\partial J}{\partial \beta_K}}{\beta_{Kk} > 0}$$

$$1) J(\omega) \neq J(\delta)$$

$$2) \omega\text{-ые точки}$$

(Если $\omega = \delta$, то меньше бэуны) $\Downarrow$

$\Rightarrow$ может возникнуть замкнутость

Невырожденная задача

$(\delta_0, \beta(\delta_0)), (\delta_1, \beta(\delta_1)), \dots, (\delta_p, \beta(\delta_p))$

$$J(\delta_0) > J(\delta_1) > \dots > J(\delta_p)$$

Бэуны и точки касания мало $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ за конечное число шагов закончится

Выводы.

Благодаря тому, что $n > 6$, можно это сделать.

Линейно-расширенное правило:

Опр: $x = (x^1, \dots, x^l) \in \mathbb{R}^l$ - линейно-расширенный

вектор, если $x \succ 0$, если

$x \neq 0$ и первая ненулевая компонента больше

$x \succ y$, если $x - y \succ 0$

$x \succ y$ или $x \prec y$ или $x = y$

07.03

$x \succ y, y \succ z \Rightarrow x \succ z$

$x \succ 0 \Rightarrow \alpha x \succ 0 \quad \forall \alpha > 0$

$x \succ y \Rightarrow \alpha x \succ \alpha y \quad \forall \alpha > 0$

$x \succ 0, y \succ 0 \Rightarrow x + \alpha y \succ 0 \quad \forall \alpha \geq 0$

$x \succ 0 \Rightarrow y \prec y - \alpha x \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall y$

$X = \{x_i = (x_i^1, \dots, x_i^l) \mid i \in M_0\}$ - заданное мн-во

Опр: $x_s \in X$ наз. линейно-расширенным миним.

элементом на X , если $\forall i \in M_0 \Rightarrow$

или $x_i \succ x_s$, или $x_i = x_s$

О.Б. $x_s = \min X$

Лемма (о минимальности минимума):
(, о выборе минимума):

M_0 - конечное множество номеров,
 $X = \{x_i \in \mathbb{R}^l, i \in M_0\}$,

~~Все~~ $x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j$.

Тогда вектор x_i достигается, минимум на $x_i \in X$
единственным векторе

Хот-во: $M_0, M_1, \dots, M_r \leftarrow$ строим

Если M_0 состоит из одного э-та, то из

Узнаем $M_1 = \{i: \min x_i = x_s^1\}$

Если M_1 состоит из одного э-та, то из

и т.д.

M_{r-1} - известно

$$M_r = \{s: \min_{i \in M_{r-1}} x_i^r = x_s^r\}$$

Во тех пор пока либо один номер

останов, либо выберем все координаты

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r \supset \dots$$

$r \leq l$; если $r < l$, то мы остановимся раньше

$r = l$, если M_0 - единственно номер где

$$\exists c, u \rightarrow \inf U = \{ u \geq 0 : Au = b \}$$

$$z = \text{rang } A = m \leq n$$

$\sigma, B(\sigma)$ - yue. sama u ee Bayue

$$B(\sigma) = \{ A_{j_1}, \dots, A_{j_z} \}$$

$$B^{-1}(\sigma) Au = B^{-1}(\sigma) b = \bar{\sigma}$$

	$B(\sigma)$	γ	u^1	u^s	u_k	u_n
Γ	$\frac{d_1}{d_2}$	σ_0	σ_1	σ_s	σ_k	σ_n
Δ	$\begin{matrix} B(\sigma) \\ \parallel \\ \Delta_0 \end{matrix}$	Δ_1	Δ_s	Δ_k	Δ_n	

$\underbrace{\quad}_{k \in B(\sigma)}$

$$\sigma_i = B^{-1}(\sigma) A_i \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \underline{b = A_0}$$

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \vdots \\ \sigma_{in} \end{pmatrix} \quad \Delta_i = \langle \bar{\sigma}, B^{-1} A_i \rangle - \rho_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Delta_i = 0 \quad \forall i \in B(\sigma)$$

$$I_k(\sigma) = \{ i \in 1 \dots n : \sigma_{ik} > 0 \}$$

$$\lim_{i \in I_k(\sigma)} \frac{\sigma_{i0}}{\sigma_{ik}} = \frac{\sigma_{30}}{\sigma_{3k}} = u^k$$

$\underbrace{\quad}_{\substack{\vee \\ 0}}$

$$\sigma, B(\sigma) \rightarrow \bar{\sigma}, B(\bar{\sigma})$$

$$\text{lex} \lim_{i \in I_k(\sigma)} \frac{\Gamma_i}{\sigma_{ik}} = \frac{\bar{\Gamma}_5}{\bar{\sigma}_{5k}}$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} u^1 + \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} u^2 + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} u^n$$

Доп: $S(v, B(v)) \not\leq 0$, если $\Gamma_i > 0 \quad \forall i=1,2$

$S(v, B(v)) \stackrel{\Delta}{\leq} S(w, B(w))$, если

$\Delta(v) \geq \Delta(w)$

Лемма: Пусть $S(v, B(v)) \not\leq 0$, тогда

$(v, B(v)) \rightarrow (w, B(w))$ осуществляется

по убыванию функции - рассогласия

$$\Gamma_s(w) = \frac{\Gamma_s(v)}{\partial x_k}, \quad \Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) - \partial x_k \frac{\Gamma_s(v)}{\partial x_k}$$

$i=1,2, i \neq s$

$$\Delta(w) = \Delta(v) - \Delta_k \frac{\Gamma_s(v)}{\partial x_k}$$

То $S(w, B(w)) \not\leq 0$, $S(v, B(v)) \stackrel{\Delta}{\leq} S(w, B(w))$

Зам-бс $\Gamma_s(w) = \frac{\Gamma_s(v)}{\partial x_k} > 0$

1) $\partial x_k \leq 0$ ($i \in I_k(v)$)

2) $\partial x_k > 0$ ($i \in I_k(v)$)

$$1) \Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) + \frac{(-\partial x_k)}{\partial x_k} \Gamma_s(w) > 0$$

$$\text{lexikon } \frac{f_i}{\partial_{\alpha_k}} = \frac{f_i}{\partial_{\beta_k}} \Rightarrow \frac{f_i}{\partial_{\alpha_k}} > \frac{f_i}{\partial_{\beta_k}} \quad i \in I_k(\sigma)$$

Умножим на $\partial_{\beta_k} > 0$

$$\Rightarrow \Gamma(\sigma) > \partial_{\alpha_k} \frac{f_i(\sigma)}{\partial_{\beta_k}} \Rightarrow 2) \Gamma_i(\omega) = \Gamma_i(\sigma) - \frac{\partial_{\alpha_k}}{\partial_{\beta_k}} f_i(\sigma) > 0$$

$$\Delta(\sigma) - \Delta(\omega) = \Delta_k \frac{f_i(\sigma)}{\partial_{\beta_k}} > 0$$

$$\Rightarrow \Delta(\sigma) > \Delta(\omega) \Rightarrow S(\sigma, B(\sigma)) \stackrel{\Delta}{>} S(\omega, B(\omega))$$

$$\Gamma_0 = (B^{-1}A_0, B^{-1}A_1, \dots, B^{-1}A_n) = B^{-1}(A_0, A_1, \dots, A_n) \quad \text{rang } 2$$

Расширенная матрица имеет 2 строки, сводится к кевинизации $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{rang } \Gamma(\sigma) = 2$$

$$\boxed{\frac{f_i(\omega)}{\partial_{\alpha_k}} = \frac{f_i(\sigma)}{\partial_{\beta_k}}}$$

$$(\sigma_0, B(\sigma_0)), (\sigma_1, B(\sigma_1)), \dots, (\sigma_p, B(\sigma_p)), \dots$$

На каждом-то конечном шаге $p \in \mathbb{N}$ $\sigma_p \in U$

$\prod I_k = -\infty$
(связано с измерительными измерениями)
20

Пример:

$$\exists (u) = 10u^2 - u^3 + 4u^4 + u^5 = \langle C, u \rangle$$

$$u = (u^1 - u^5) \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u^4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u^5$$

$\parallel$
 B A_1 A_2 A_3 A_4 A_5

$$B = (A_4, A_5, A_2) = I_3$$

	B	y	u ₁	u ₂	u ₃	u ₄	u ₅
Γ_1	4	2	1	0	2	1	0
Γ_2	5	3	2	0	-1	0	1
Γ_3	2	1	-1	1	(1)	0	0
Δ		21	-4	0	18	0	0

$$v_0 = (0, 1, 0, 2, 3)$$

$$\text{von } \left\{ \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} \Rightarrow \text{max } 3$$

$$I_3(v) = \{1, 3\}$$

$$\left(1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right) = \frac{\Gamma_1}{r_{14}}$$

$$\left(1 \quad (-1) \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right) = \frac{\Gamma_3}{r_{34}}$$

$$\Downarrow$$

$$s=3$$

14.03

	b ₀	γ	u ¹	u ²	u ³	u ⁴	u ⁵
	4	0	3	-2	0	1	0
	5	4	1	1	0	0	1
F ₃	3	1	-1	1	1	0	0
Δ			3	14	-18	0	0

x18 - u₃ кнн
спрнн↙ (аналогично
с 1^{ой} u₂^{ой} стр)

$$w(0, 0, 1, 0, 4)$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 24 & -4 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 18 & -18 & 18 & 18 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 14 & -18 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{кон } \left\{ \frac{0}{3}, \frac{4}{1} \right\} = 0 \Rightarrow s=4$$

	b	γ	u ¹	u ²	u ³	u ⁴	u ⁵
F ₁ u ¹	0		1	-2/3	0	1/2	0
F ₂ u ⁵	4		0	5/3	0	-1/3	1
F ₃ u ³	1		0	1/3	1	1/3	0
Δ	3		0	-26/3	0	-14/3	0
				1		1	
				0		0	

⇒ лучше закончить

⇒ оптимальное решение

$$u^* = (0, 0, 1, 0, 4) \quad Z(u^*) = 3$$

(мы получили в опт. решение, но из-за
лишнего базиса, т.е. в опр. таблице мы

уже начеки ав. тому, но C-T
 тако не показало)

Задача: $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ та не показало
 $(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$

Максимизирова φ та не сачеки φ -то

$$J(u) \rightarrow \max \Rightarrow g(u) = -J(u) \rightarrow \min$$

$S(u, v(u)) \geq 0$ - лева минимума!

Почет начеки условия тому
 (метод невысеченного разреза)

$$V = \{u \geq 0, \sum_{i=1}^m Au = b\} \quad (1)$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{[} b \geq 0, \text{ или } (Au)^i = b^i \leq 0 \text{ (x1),} \\ \text{т.е. система невысеченна } \Rightarrow \text{ не оп. сачеки } \end{matrix}$$

$$g(z) = x^1 + \dots + x^n + 0u^1 + \dots + 0u^m = \langle c, z \rangle$$

$$Z = \{z \in E^{n+m} : z \geq 0, Ax + Au = b\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = (I_A) \quad : Cz = b$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad b + A \cdot 0 = b$$

$$B(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_m$$

$$b^{\bar{z}_0} = x + Au$$

$$\Delta_i = \langle \mu_i, B^{-1}(z_0) e_i \rangle - 0 = \sum_{j=1}^m a_{ij} \quad \text{from theory}$$

$$S_0 \geq 0$$

$$I, \text{ or } f_x = m_f \geq 0, \text{ i.e. we move into } -\infty$$

$$(z_*, B(z_*)), f(z_*) = f_*$$

$$1) f_* > 0 \Rightarrow V = \emptyset$$

$$\exists u_0 \in V \Rightarrow \tilde{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in Z$$

$$f(\tilde{z}) = 0 \geq f_* > 0 \quad \times$$

$$\Rightarrow 2) f_* = 0 = f(z_*) = 0 \Rightarrow x_* = 0 \Rightarrow z_* = \begin{pmatrix} 0 \\ u_* \end{pmatrix}$$

$$u_* \text{ y.e. } \tau \text{ min-} (a) V, \text{ unique}$$

$$\exists v_1, v_2 \in V, u_* = \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2, 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in Z$$

$$z_* = \begin{pmatrix} 0 \\ u_* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \text{no y.e. since}$$

$$v_* \quad B(v_*) = \emptyset$$

$$v_*^j > 0 \Rightarrow j \in B(v_*), \text{ прообраз } f_0 \in K(v_*)$$

$$\text{rang } A = r, \text{ } z \text{ можно выбрать как в } \Lambda A$$

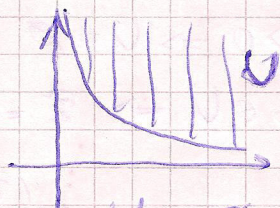
T1: Если $V = \{ \cdot \} \neq \emptyset$, то $\exists$ ун точка
(показано с помощью единичного шара)

T2 (Вейерштрасса): Если в компактной
задане $I_* = \inf I(u) > -\infty$, то $V_* \neq \emptyset$

Пример:

$$I(u) = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

$$U = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq \frac{1}{x} \}$$



$$\text{хотя } I_* = 0, \quad U_* = \emptyset$$

Изотсюда, что заданная компактная

T3: Если компактная заданная непрерывна
 $U_* \neq \emptyset$, то $\exists$ ун точка u_* , которая
является оптимальной

Теорема Кунга - Такера

21.03

$$(1) \mathcal{I}(u) = \langle C, u \rangle \rightarrow \inf_{u \in U}$$

$$U = \{u \geq 0, Au = b\}$$

$$L(u, \lambda) = \langle C, u \rangle + \langle \lambda, Au - b \rangle, u \geq 0, \lambda \in \Lambda$$

Следствие

$$(u_*, \lambda^*) \in U_0 \in E^u: L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq$$

$$\leq L(u, \lambda^*) \quad \forall (u, \lambda) \in U_0 \times \Lambda_0$$

Теорема 4: $\exists U_* \neq \emptyset$ в задаче (1)

Тогда $\forall u_* \in U_* \exists \lambda^* \in E^u: (u_*, \lambda^*)$ - седло

Верно и обратное, если (u_*, λ^*) - седло, то $u_* \in U_*$.

$$\text{Док-во: } (\Rightarrow) \mathcal{I} u_* \in U_* \Rightarrow u_* \geq 0, Au_* = b$$

$$\mathcal{I}(u_*) = \mathcal{I}_* > -\infty$$

Возьмем наш λ^* , получим равенство:

$$1: \mathcal{I} u_* \in U_* \text{ Тогда } \exists \lambda^*$$

$$1) A^T \lambda^* + C \geq 0$$

$$2) \langle C, u_* \rangle = \langle -b, \lambda^* \rangle$$

Док-во:

Случай 1: $\exists m = \text{rang } A = 2$

$\Rightarrow$ к задаче можно применить
симплекс-метод

$$1) V \neq 0 \Rightarrow \exists (v_0, v(v_0)) \xrightarrow{\text{симплекс}} (v_*, V(v_*))$$

$$\exists (v_*) = v_*$$

Процесс закончится за конечное число
шагов (реализуется 1^{ый} случай)

Критерий оптимальности S -процесса

$$A_i = \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i \leq 0 \quad i=1, n$$

$$\lambda^* = -(B^{-1})^T \bar{c}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad B(v_*) = (A_{j_1} \dots A_{j_r})$$

$$\downarrow$$

сужим в A_i $A_i = \langle \bar{c}, B^{-1} A_i \rangle - c_i =$

$$= \langle (B^{-1})^T \bar{c}, A_i \rangle - c_i \leq 0$$

$$\Rightarrow -\langle \lambda^*, A_i \rangle - c_i \leq 0$$

$$\downarrow$$

$$-A_i^T \lambda^* - c_i \leq 0$$

$$A^T \lambda^* + c \geq 0 \quad i=1, n$$

$$\downarrow$$

$$A^T \lambda^* + c \geq 0 \quad \text{нужно}$$

$$2) \langle c, u_* \rangle = \exists v_* = \langle c, u_* \rangle = \langle \bar{c}, \bar{v}_* \rangle =$$

$$= \langle \bar{c}, B^{-1} b \rangle = \langle (B^{-1})^T \bar{c}, b \rangle = \langle -\lambda^*, b \rangle =$$

$$= \langle -b, \lambda^* \rangle \quad \text{нужно}$$

Выраза 21 $r = \text{rang } A \leq m$ ($r \leq n$)

$$Au = b \Leftrightarrow \langle a_i, u \rangle = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

Уберем 13 строк $\Rightarrow$ получим систему равносильную системе

$$\langle a_i, u \rangle = b_i, \quad i = \overline{1, r-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{A} \bar{u} = \bar{b}, \quad \text{rang } \bar{A} = r = \text{rang } A$$

$\Downarrow$

$$(1) \Leftrightarrow \langle c, u \rangle \rightarrow \min, \quad u \in V = \{u \geq 0; \bar{A} \bar{u} = \bar{b}\}$$

а по выража 1

$$\Rightarrow \exists \lambda^* : A^T \lambda^* + c \geq 0,$$

$$\langle c, u_* \rangle = \langle -b, \lambda^* \rangle$$

$$\Rightarrow \text{возьмем } \lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m-r}$$

Покажем, что это тоже самое λ^* ,

$$A^T \lambda^* + c = \bar{A}^T \bar{\lambda}^* + c$$

$$1) \bar{A}^T \bar{\lambda}^* + c \geq 0 \Rightarrow 1) \text{ true}$$

$$2) \langle c, u_* \rangle = \langle -b, \lambda^* \rangle = \langle b, \bar{\lambda}^* \rangle \Rightarrow 2) \text{ true}$$

Лемма доказана

Вернемся к формуле теоремы

Покажем, что (u^*, λ^*) — сепло

Правое нерав-во: для $\forall u \in U$

$$\begin{aligned} L(u^*, \lambda^*) &= \langle c, u^* \rangle + \langle \lambda^*, Au^* - b \rangle = \\ &= \langle c, u^* \rangle \stackrel{\text{лемма}}{=} \langle -b, \lambda^* \rangle \leq \langle -b, \lambda^* \rangle + \\ &+ \langle u^*, A^T \lambda^* + c \rangle = \langle -b, \lambda^* \rangle + \langle Au^*, \lambda^* \rangle + \\ &+ \langle u, c \rangle = \langle -b + Au, \lambda^* \rangle + \langle c, u \rangle = \\ &= L(u, \lambda^*) \quad \forall u \geq 0 \end{aligned}$$

Левое нерав-во:

$$\begin{aligned} L(u^*, \lambda^*) - L(u^*, \lambda) &= \langle c, u^* \rangle + \\ &+ \langle \lambda^*, Au^* - b \rangle - \langle c, u^* \rangle + \langle \lambda, Au^* - b \rangle = 0 \\ &\quad \forall \lambda \in E^m \\ \Rightarrow (u^*, \lambda^*) &\text{ — сепло} \end{aligned}$$

Хвостовая ф-я:

$$\psi(\lambda) = \inf_{u \geq 0} L(u, \lambda) = \begin{cases} \langle -c, \lambda \rangle, & \text{если } A^T \lambda + c \geq 0 \\ -\infty, & \text{если иначе} \end{cases}$$

$$\rightarrow \sup_{\lambda \in E^m} \psi(\lambda)$$

Хвостовая задача:

$$\langle -b, \lambda \rangle \rightarrow \sup, A^T \lambda + c \geq 0$$

Мы докажем, что всегда все верно

$$\varphi^* = \sup_{\lambda_0} \langle -b, \lambda \rangle = \inf_{u \in U} \langle c, u \rangle = J_*$$

(в общем случае $\varphi^* \leq J_*$)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^* = J_* \\ u_* \in U^* \\ \lambda^* \in \Lambda^* \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Исходно}$$

Оптимальное управление

$$J(u) = \int_{t_0}^T f^0(x(t), u(t), t) dt + \varphi^0(x(T))$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t), t), & t_0 \leq t \leq T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Надо выбрать управление u :

$$u = u(t) \in L_2^m[t_0, T], \quad u \in U \subset L_2^m[t_0, T]$$

28.03

$$J(u) = \int_{t_0}^T f^0(\tilde{x}, \tilde{u}, t) dt + g^0(\tilde{x}(T)) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{u}, t), & t_0 \leq t \leq T \\ \tilde{x}(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

$$u = u(t) \in L_2^2[t, T] \quad (3)$$

$u = u(t) \xrightarrow{(2)} x = x(t, u) = \text{пер.}$
 u для минимизации макс. функции
 Беллмана zero power

$$x(t, u) = \int_{t_0}^t f(x(\tau, u), u(\tau), \tau) d\tau + x_0$$

Будем предполагать, что:

$$|f(x, u, t) - f(y, v, t)|_{E^n} \leq L(|x - y| + |u - v|)$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ решение } x(t, u), \quad t_0 \leq t \leq T \quad \forall u \in L_2^2[t_0, T]$$

Задача вариационного управления

$$J(u+h) - J(u) \leq \langle J'(u), h \rangle_H + o(\|h\|_H) \quad \Leftrightarrow$$

$$H = L_2^2[t_0, T]$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^T \langle (J'(u))^{\tilde{x}}(t), h^{\tilde{x}}(t) \rangle_{E^2} dt + o\left(\left(\int_{t_0}^T \|h^{\tilde{x}}(t)\|_{E^2}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Т. Пусть $f, f_x, f_u, f^0, f^0_u, g^0, g^0_x$ -

непр. по совокупности своих аргументов

и удовлетворяет условию Липшица по (x, u)

Тогда
$$J'(u) : J'(u) = - \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{\substack{u=u(t) \\ x=x(t, u)}}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

где H - ф-я Гамильтона - Понкаря

$$(5) H(x, u, t, \psi) = - f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle,$$

$$(6) \dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{\substack{u=u(t) \\ x=x(t, u)}} \quad t_0 \leq t \leq T; \quad \psi(T) = - \frac{\partial f^0}{\partial x} \Big|_{x=x(T, u)}$$

Во всех этих формулах x, u, t как независимые переменные.

Для того, как найти управление надо решить 2 задачи Коши: (2) и (6).

4-я лемма: $\langle u, \lambda \rangle = J(u) + \langle \lambda, f(x, u, t) - \dot{x} \rangle =$

$$= \int_{t_0}^T f^0(x, u, t) dt + f(x(T)) + \int_{t_0}^T \langle \lambda(t), f(x, u, t) - \dot{x} \rangle dt - \int_{t_0}^T \langle \lambda, \dot{x} \rangle dt$$

74

1. 1000

$$\Rightarrow J(u+h) - J(u) \stackrel{(4)}{=} \int_{t_0}^T (f^0(x+\Delta x, u+h, t) - f^0(x, u, t)) dt + g(x(T) + \Delta x(T)) - g(x(T)) = \int_{t_0}^T \Delta f^0 + \langle g'(x(T)), \Delta x(T) \rangle + R_1 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} |R_1| &= \langle g'(x(T) + \theta_1 \Delta x(T)) - g'(x(T)), \Delta x(T) \rangle \\ |R_1| &\leq L \|\Delta x(T)\|^2 \stackrel{(9)}{\leq} c_2 \|h\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle g'(x(T)), \Delta x(T) \rangle &\stackrel{(6)}{=} - \langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle = \\ &= - \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \langle \psi(t), x(t) \rangle dt - \langle \psi(t_0), \Delta x(t_0) \rangle = \\ &= \int_{t_0}^T (\langle \dot{\psi}, \Delta x \rangle - \langle \psi, \Delta \dot{x} \rangle) dt = \\ &= \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(\dots)}{\partial x}, \Delta x \right\rangle dt - \int_{t_0}^T \langle \psi, \Delta f \rangle dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &\stackrel{(1)}{=} - \int_{t_0}^T \Delta H dt + \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(\dots)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt \\ &\quad + R_1 \end{aligned}$$

$$\Delta H = H(x+\Delta x, u+h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi) =$$

$$= \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial x}, \Delta x \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial u}, h \right\rangle \quad \textcircled{=}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \end{array} \right\} = (x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_1 h, t, \psi)$$

$$\textcircled{=} \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial u}, h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H(\theta_2)}{\partial u} - \frac{\partial H(\theta)}{\partial u}, h \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial x}, \Delta x \right\rangle \quad (9)$$

$$\Rightarrow I(u+h) - I(u) = \int_{t_0}^T \Delta H dt +$$

$$= - \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial u}, h(t) \right\rangle dt + R_1 + R_2 + R_3$$

$$\text{we } R_2 = - \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial u} - \frac{\partial H(\theta)}{\partial u}, h \right\rangle dt$$

$$R_3 = - \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(\theta)}{\partial x} - \frac{\partial H(\theta)}{\partial x}, \Delta x \right\rangle dt$$

$$H_u = -f_u^0 + f_u \psi$$

$$H_x = -f_x^0 + f_x \psi$$

$$|R_2| \leq \int_{t_0}^T (|f_u^0| + |f_u| |\psi|) dt \leq$$

$$\leq (1 + \|\psi\|) \int_{t_0}^T (|\Delta x| + |h|) dt \leq$$

$$\leq C_3 \|h\|_{L_2}^2$$

$$\|R_3\| \leq C_u \|h\|_{L_2^2[t_0, T]}^2$$

$$\Rightarrow J(u+h) - J(u) = - \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(-)}{\partial u}, h(t) \right\rangle dt + o(\|h\|_{L_2^2}^2)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^T f^0(x, u, t) dt + \varphi^0(x(T)) \quad (1) \quad (2.04)$$

$$\text{где } \dot{x} = f(x, u, t), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

$$u = u(t) \in L_2^2[t_0, T] \quad (3)$$

$$H(x, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle \quad (4)$$

С нас задан начальный момент времени

$$\text{задача: } \psi = - \frac{\partial H}{\partial x} \bigg|_{\substack{u=u(t) \\ x=x(t, u)}} \quad (5)$$

$$\psi(T) = - \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \bigg|_{x=x(T, u)}$$

$$\Rightarrow J'(u) = - \frac{\partial H}{\partial u} \bigg|_{\substack{u=u(t) \\ x=x(t, u) \\ \psi=\psi(t, u)}} \quad \leftarrow \text{это и есть градиент}$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) - \alpha_k \left(- \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=u_k} \right)$$

$\Psi = \Psi(t, u)$
 $x = (t, u)$

где заданы
 минимизация (1)
 (где максимизация наго спрост $\Psi + \Psi$)

$$J(x(T)) - x_1'' \rightarrow P(u) = |x(T, u) - x_1|^2$$

Зато решение на управл. может
 существовать.

↑
 итератор $\Rightarrow \varphi_k(u) = J(u) + \alpha_k P(u)$

$$J(x'(t, u)) \leq x_0' = \text{const}, t \in [t_0, T]$$

$$\Rightarrow P(u) = \int_{t_0}^T \max \{ x'(t, u) - x_0', 0 \} dt$$

(без учета то что непрерывно, а
 конечно для этого)

Пример максимизации Рунге-Кутты

$$(1) J(u) = \int_{t_0}^T f^0(x, u, t) dt + f^0(x(T)) \rightarrow \inf$$

$$(2) \dot{x} = f^1(x, u, t), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) \leq x_0$$

$$(3) u = u(t) \in V = \{ u(t) \in L_2^2[t_0, T] : \\ u(t) \in V \subset E^2 \}$$

$$V = \{u \in L_2^2 : \|u\|_{L_2^2}^2 = \int_{t_0}^T |u(t)|^2 dt \leq 1\}$$

$$V_1 = \{u \in L_2^2 : |u(t)|_{E^2} \leq 1\} \quad V = \{u \in E^2 : |u| \leq 1\}$$

Теорема: $\exists f_x^\circ, f, f_x, g^\circ, g_x^\circ$ - непрерывно по (x, u, t) , $V_* = \{u \in V : \exists(u) = \inf_v \int_0^T \mathcal{H}(x(t, u), v, t, \psi(t, u)) dt\} \neq \emptyset$

Тогда необходимо $\forall u_* \in V_* \Rightarrow$

$$\max_{v \in V} \mathcal{H}(x(t, u_*), v, t, \psi(t, u_*)) =$$

$$= \mathcal{H}(x(t, u_*), u_*(t), t, \psi(t, u_*)) \quad (6)$$

$t \in [t_0, T]$

~~$$\int_{t_0}^T \mathcal{H}(x(t, u), v, t, \psi(t, u)) dt \geq \int_{t_0}^T \mathcal{H}(x(t, u), u(t), t, \psi(t, u)) dt$$~~

Доказ. (при пол. предположении)

Будем считать, что $f, f_x^\circ, f_x, g^\circ, g_x^\circ$ - убоа. убоа. Липшица по (x, u)

и $u(t)$ - кус.-непр.

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{I}(u) &= \mathcal{I}(u+h) - \mathcal{I}(u) = \\ &= - \int_{t_0}^T [\mathcal{H}(x+\Delta x, u+h, t, \psi) - \mathcal{H}(x, u, t, \psi)] dt + \\ &+ \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, t, \psi)}{\partial x}, \Delta x \right\rangle dt + k_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$H(x+\Delta x, u+h, t, \psi) =$$

$$= H(x, u+h, t, \psi) +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial H(x+\theta \Delta x, u+h, t, \psi)}{\partial x}, \Delta x \right\rangle$$

$$R_2 = - \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial H(x+\theta \Delta x, u+h, t, \psi)}{\partial x} \right\rangle dt$$

$$= \frac{\partial H(x, u, t, \psi)}{\partial x}, \Delta x \geq dt$$

$$\Rightarrow \Delta J(u) = - \int_{t_0}^T [H(x, u+h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi)] dt +$$

$$+ R_1 + R_2 \quad (p)$$

$$\text{Введе } u = u_x(t)$$

$$0 \leq J(u) = J(u_x + h) - J(u_x) =$$

$$= - \int_{t_0}^T [H(x_x, u_x+h, t, \psi) - H(x_x, u_x, t, \psi)] dt +$$

$$+ R_1 + R_2$$

$$|R_1| \leq L |\Delta x_x(t)|^2 \leq C \left(\int_{t_0}^T |h(t)| dt \right)^2$$

$$|\Delta x(t)| \leq C \int_{t_0}^T |h(s)| ds$$

(once round
lemma (7) is more
simple) (9)

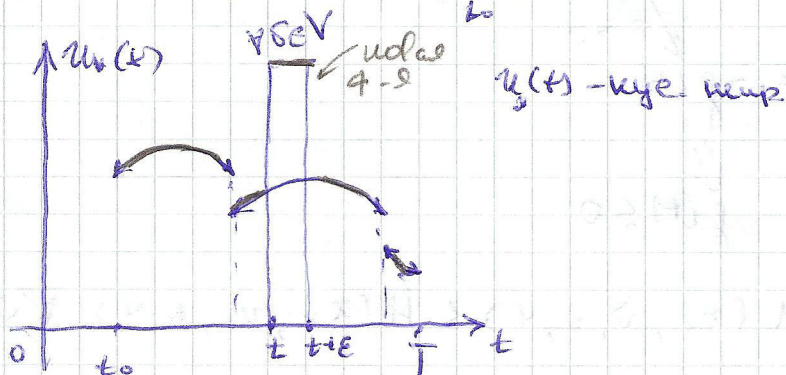
из леммы Громова

$$|k_2| \leq \int_{t_0}^T (|a_2 x| + |h|) |a_2 x| dt (1 + \| \psi \|_{C[t_0, T]}) \leq$$

$$\{ Hx = -f_0^e + f_0^e \psi \}$$

$$\leq C \left(\int_{t_0}^T |h(t)| dt \right)^2$$

$$k_1 + k_2 = R, \quad |R| \leq C \left(\int_{t_0}^T |h(t)| dt \right)^2$$



$$h(\tau) = \begin{cases} (5 - u_v(\tau)), & \tau \in [t, t+\epsilon] \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$u_v(\tau) + h(\tau) = \begin{cases} 5 & \text{на } [t, t+\epsilon] \\ u_v(\tau) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J(u_v + h) - J(u_v) &= - \int_t^{t+\epsilon} [H(x_v, u_v + h, t, \psi) - \\ &\quad - H(x_v, u_v, t, \psi)] dt + R \end{aligned}$$

$$|R| \leq c \left(\int_t^{t+\varepsilon} |h(\tau)| d\tau \right)^2 \leq c\varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} |v - u_*(\tau)|^2 d\tau$$

$$\Rightarrow 0 \leq \Delta J(u) \leq - \underbrace{\int_t^{t+\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} h(\tau) d\tau \right)}_{= f(t+\theta\varepsilon)} + c\varepsilon \int_t^{t+\varepsilon} |v - u_*(\tau)|^2 d\tau$$

$$\Rightarrow 0 \leq -f(t+\theta\varepsilon) + c \int_t^{t+\varepsilon} |v - u_*(\tau)|^2 d\tau$$

$$0 \leq -f(t) \quad \downarrow \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\Downarrow \\ f(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow H(x_*, v, t, \psi) \leq H(x_*, u_*, t, \psi) \quad \forall v \in V$$

мы

Сделаем дополнительное предположение
максимальности

$$1) H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle$$

$$u \in V, t \in [t_0, T]$$

$$2) H(x, v, t, \psi) \rightarrow \inf_{v \in V} \text{ при фикс. } (x, t, \psi)$$

$$\Rightarrow v = u = u(x, t, \psi)$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u(x, t, \psi), t), t_0 \leq t \leq T \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$(x) \begin{cases} \psi = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{u=u(x, t, \psi)} \\ \psi(T) = - \frac{\partial g^0}{\partial x} \Big|_{x=x(T)} \end{cases}$$

↙ краевая задача принципа максимума

$$4) u = u(t) = u(x(t), t, \psi(t))$$

Принцип максимума
(общая форма)

11.01

$$J(u(t_0), x(t_0), T) = \int_{t_0}^T f^0(x(t), u(t), t) dt + \varphi(x(T), T) \quad (1)$$

$$\dot{x} = f(x, u^2(t), t), t_0 \leq t \leq T \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{запр. условия начен}) \quad (3)$$

$$g^i(x(T), T) \leq 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (4)$$

$$g^i(x(T), T) = 0, \quad i = \overline{m+1, s}$$

$$u = u(t) - \text{выс-норм.}, u(t) \in V \quad \forall t \in [t_0, T] \\ \text{в локальном смысле} \quad (5)$$

$$V \subseteq \mathbb{R}^2$$

1) Обоз. управл. концы
 $g_i(x, T) \equiv 0, i = \overline{1, 3}$

2) $x(T) = x_T$ - задан.
 $g^0 = x^0 - x_T^0 = 0$

3) $g_i(x, T)$ - возможные управл. концы

4) $g^0(x, T) \equiv T, f^0 \equiv 0$

$$H = -\rho_0 f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ = H(x, u, t, \psi, \rho_0)$$

Пусть свободные управл. концы $\rho_0 = 1$

$$l(x, T, \bar{a}) = \sum_{i=0}^5 a_i g_i(x, T)$$

$$\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_5)$$

Теорема: $J(u(\cdot), x(\cdot))$ - достигается,

$f_x^0, f^0, g_x^0, f^0, g^0$ - непрерывны

То макс. $\exists \bar{a}, \psi(t)$:

1) $\bar{a} \neq 0, a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, a_m \geq 0, \psi^0 = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x(t_0), u=u(t_0)}$

2) $\max_{\bar{a} \in \bar{A}} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \rho_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t))$
 $\forall t \in [t_0, T]$ во всех точках макс. управл. концы

3) вел. трансверсальности

$$\psi(T) = - \frac{\partial \ell}{\partial x} \Big|_{x=x(T)}^T$$

4) если T - мин, то

$$H(x(t), u(t), t, \psi(t), a_0) \Big|_{t=T} =$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial T} \Big|_{x_0=x(T)}$$

$$5) \text{adj}_i(x(T), T) = 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Схема нахождения экстремала
минимизации

$$1) H(x, u, t, \psi, a_0) \rightarrow \max_{u \in V} \Rightarrow J = J(x, t, \psi, a_0)$$

$$2) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u(x, t, \psi, a_0)), t \\ \dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{u = u(x, t, \psi, a_0)} \end{cases}$$

$$3) x(t_0) \stackrel{n}{=} x_0, \quad \psi(T) \stackrel{n}{=} - \frac{\partial \ell}{\partial x} \Big|_{x=x(T)}$$

$$\text{adj}_i(x(T), T) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$g_i(x(T), T) = 0, \quad i = \overline{m+1, S}$$

$$|\bar{a}| + |\psi(\tilde{t})| = 1$$

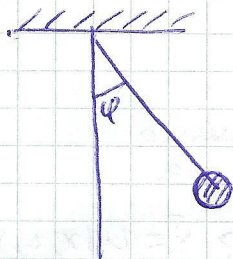
2n+1 - ур-ние и состояние системы

4) Если T-мехл

$$H(_) \Big|_T = \frac{\partial L}{\partial T}$$

$$Z = \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \quad \bar{a} = (a_0 \dots a_s) \Rightarrow u = u(x(t), t, \psi(t), a_0)$$

Динамическое управление механической системой



$$\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + \sin \varphi = u(t)$$

$u(t)$ - куде кнур

$$u(t) \in V = \{ u \in E'; |u| \leq 1 \}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

$$J(u) = (\varphi(t))^2 + (\dot{\varphi}(t))^2 \rightarrow \min$$

Сведем к ур-нию 1-го порядка:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= \varphi(t), \\ x^2 &= \dot{\varphi}(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}^1 &= \dot{\varphi} = x^2 \\ \dot{x}^2 &= \ddot{\varphi} = -\beta \dot{\varphi} - \sin \varphi + u(t) = \\ &= -\beta x^2 - \sin x^1 + u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 = f^1 \\ \ddot{x}^2 = -\beta x^2 - \sin x^1 + u \end{cases}$$

$$x^1(0) = \psi_0^1 \quad x^2(0) = \psi_0^2 \Rightarrow x(0) = x_0$$

$$J(u) = (x^1(T))^2 + (x^2(T))^2 \rightarrow \min$$

$$f^0 = 0, \quad g^0(x) = \beta x^2 + (x^2)^2$$

$$H = -0 + \psi_1 x^2 + \psi_2 (-\beta x^2 - \sin x^1 + u)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x^1} = -(-\cos x^1) \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\psi_1 + \beta \psi_2 \end{cases}$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial g^0}{\partial x} \bigg|_{x=x(T)} = \begin{pmatrix} 2x^1(T) \\ 2x^2(T) \end{pmatrix} = -2x(T)$$

$$\max_{|u| \leq 1} H \Leftrightarrow \max_{|u| \leq 1} \psi_2 u \Rightarrow u = \text{sign} \psi_2, \quad \psi_2 \neq 0$$

Если $\psi_2 = 0$, то неопределенность

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \ddot{x}^2 = -\beta x^2 - \sin x^1 + \text{sign} \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 = \cos x^1 \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta \psi_2 \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(\tau) = -2x(\tau)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, u(t) = \operatorname{sign} y_2(t)$$